

Всероссийская олимпиада школьников по математике

II (муниципальный) этап

2022 – 2023 учебный год

7 КЛАСС

1. В прошлом году сестра была старше брата в 4 раза, а в следующем году она будет старше него в 3 раза. Через сколько лет от настоящего времени сестра станет в 2 раза старше брата?
2. В строку выписано восемь цифр 2. Разрешается использовать скобки и знаки арифметических действий $+$, $-$, $*$, $/$. Как получить в результате число 2022? Многочисленные числа из двоек (типа 22, 222) при этом допускаются.
3. По кругу расположено 22 фишки, среди которых 10 красных и 12 синих. Известно, что имеется ровно 5 пар стоящих рядом красных фишек. Какие значения может принимать число пар стоящих рядом синих фишек?
4. В компании из трёх человек A , B , C каждый является либо рыцарем, и всегда говорит правду, либо лжецом, и всегда говорит неправду. Один из участников заявил, что A и B — оба лжецы, а другой участник сказал, что B и C являются лжецами. Кто именно сделал такие высказывания, не известно. Можно ли по этой информации однозначно определить число рыцарей в компании?
5. На клетчатой бумаге нарисован прямоугольник 5×9 . Можно ли разрезать его на “уголки” из трёх клеток, проводя разрезы по линиям сетки?

За полное решение каждой задачи дается по 7 баллов

Максимальная сумма баллов равна 35

Всероссийская олимпиада школьников по математике

II (муниципальный) этап

2022 – 2023 учебный год

8 КЛАСС

1. По кругу расположен 21 ящик. В каждом из них лежат шары двух цветов: красные и синие. Девочка перекладывает по одному шару из каждого ящика в следующий за ним по часовой стрелке. На каждом ящике имеется надпись о том, сколько в нём красных шаров и сколько синих. Могло ли так получиться, что после перекладываний все надписи из верных стали неверными?
2. В строку выписано восемь цифр 2. Разрешается использовать скобки и знаки арифметических действий $+$, $-$, $*$, $/$. Как получить в результате число 2022? Многочисленные числа из двоек (типа 22, 222) при этом допускаются.
3. Одноклассники Петя и Вася получили задание: написать 10 попарно различных натуральных чисел, сумма которых составляет 100. Каждый из них независимо выполнил такое задание. Обязательно ли найдётся число, которое написал как один, так и другой школьник?
4. Диагонали четырехугольника разрезают его на 4 треугольника. Известно, что среди них есть треугольники всех трёх видов: остроугольные, прямоугольные и тупоугольные. Можно ли точно установить число треугольников каждого из видов?
5. На клетчатой бумаге нарисован прямоугольник 5×9 . Можно ли разрезать его на “уголки” из трёх клеток, проводя разрезы по линиям сетки?

За полное решение каждой задачи дается по 7 баллов

Максимальная сумма баллов равна 35

Всероссийская олимпиада школьников по математике

II (муниципальный) этап

2022 – 2023 учебный год

9 КЛАСС

1. Найти наибольшее натуральное число, в котором нет повторяющихся цифр, и у которого любые две рядом стоящие цифры в сумме дают не меньше девяти.
2. В компании из четырёх человек A , B , C , D каждый является либо рыцарем, и всегда говорит правду, либо лжецом, и всегда говорит неправду. Каждый из участников сделал по одному заявлению. Один сказал, что A лжец, другой — что B лжец, третий сказал то же самое про C , а четвёртый — про D . Кто именно сделал такие высказывания, не известно. Можно ли по этой информации однозначно определить число рыцарей в компании?
3. В строку выписано восемь цифр 2. Разрешается использовать скобки и знаки арифметических действий $+$, $-$, $*$, $/$. Как получить в результате число 2022? Многочисленные числа из двоек (типа 22, 222) при этом допускаются.
4. В клетках квадрата размером 3×3 записаны 9 последовательных натуральных чисел. Может ли при этом оказаться, что сумма чисел в любых двух соседних по стороне клетках является простым числом?
5. На клетчатой бумаге нарисован квадрат 4×4 . В каждом из 16 квадратов провели диагональ. Какое наименьшее число узлов сетки могут оказаться концами хотя бы одной из проведённых диагоналей?

За полное решение каждой задачи дается по 7 баллов

Максимальная сумма баллов равна 35

Всероссийская олимпиада школьников по математике

II (муниципальный) этап

2022 – 2023 учебный год

10 КЛАСС

1. На доске написано число 2. Двое играют в игру, поочередно делая ходы. За один ход к написанному числу можно прибавить любой его натуральный делитель, отличный от самого числа. Далее написанное число заменяется найденной суммой. Выигрывает тот, кто получит число 100. При этом нельзя писать числа, большие 100. Кто выигрывает при правильной игре: начинающий или его партнёр?
2. Несколько двузначных чисел в сумме составляют 101, и ни одно из них не оканчивается нулём. В каждом из слагаемых поменяли местами цифры. Какое наименьшее число могло получиться в результате?
3. При каких натуральных n число $n^4 + n^3 + n^2 + n + 1$ является точным квадратом?
4. На отрезке AB длиной 10 как на диаметре построена окружность. Выберем на диаметре точку C и проведём через неё хорду DE под углом 45 градусов к диаметру. Какое наибольшее и какое наименьшее значение может принимать сумма квадратов $CD^2 + CE^2$?
5. Имеется компания из 7 человек. Всегда ли возможно выделить в ней три пары участников, чтобы либо в каждой из них оказались знакомые между собой, либо оказались не знакомые между собой?

За полное решение каждой задачи дается по 7 баллов

Максимальная сумма баллов равна 35

Всероссийская олимпиада школьников по математике

II (муниципальный) этап

2022 – 2023 учебный год

11 КЛАСС

1. Существует ли заданная на числовой прямой функция $f(x)$, которая может принимать отрицательные значения, но при этом $f(f(x)) > 0$ для всех x ?
2. Сколько имеется четырёхзначных чисел, у которых первая десятичная цифра делится на каждую из остальных?
3. Сумма трёх целых чисел равна 11, а сумма их квадратов равна 155. Сколько решений имеет такая задача? (Решения, отличающиеся только порядком следования чисел, считаются одинаковыми.)
4. Имеется компания из 8 человек. Всегда ли возможно выделить в ней три пары участников, чтобы либо в каждой из них оказались знакомые между собой, либо оказались не знакомые между собой?
5. Вписанная в треугольник ABC окружность делит медиану AM на три отрезка равной длины. Зная, что $BC = 10$, найти длины остальных сторон треугольника.

За полное решение каждой задачи дается по 7 баллов

Максимальная сумма баллов равна 35

Всероссийская олимпиада школьников по математике

II (муниципальный) этап

2022 – 2023 учебный год

Решения и указания

Полное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов. При неполном решении задачи, баллы обычно выставляются пропорционально тому, какой процент полезных интеллектуальных усилий, нужных для её решения, был затрачен. Например, не следует вообще давать баллы за рассмотрение легких частных случаев, которые никак не проясняют общей картины.

За задачи, которые решены почти полностью, но в решении которых допущены мелкие ошибки (скажем, арифметические), мы рекомендуем вычитать один или два балла в зависимости от характера допущенной ошибки.

Следует отметить, что проверка решений задач и выставление баллов является в любом случае процессом **творческим** и не до конца поддаётся формализации. Поэтому трудно дать рекомендации, охватывающие все возможные ситуации, которые могут возникнуть в ходе проверки. Решения задач, полученных учениками, безусловно, могут отличаться от авторских. Единственным критерием в этом случае является правильность рассуждений.

Некоторые предложения по выставлению баллов, касающиеся отдельных задач, приведены ниже.

В тех задачах, где требуется построить какой-либо пример, не обязательно приводить рассуждения о том, как именно он был получен. В случае, если правильность примера легко проверяется, его достаточно всего лишь предъявить. К этой группе задач относятся VII.2, VIII.2, IX.3 (задача про составление числа из набора двоек). Сюда же можно отнести задачи VII.5, VIII.5 (разрезание прямоугольника на “уголки”). Однако во многих задачах, помимо верного примера, нужно бывает обосновывать или единственность или оптимальность найденного решения. Более подробно см. ниже.

Задачи VII.1, VIII.4, X.4, XI.2, XI.5 относятся к числу обычных школьных. Их оценка должна производиться в соответствии с традиционной практикой. Максимальный балл даётся за полное решение.

В задаче VII.3 за верный ответ без обоснования баллы не начисляются. В задачах VII.4, VIII.1, VIII.3, IX.2, IX.4, X.1, X.5, XI.4 требуется полное логическое обоснование ответа.

В задаче IX.1 за верный ответ без обоснования того, что найдено наибольшее число, можно давать до 3 баллов. В задаче IX.5 за пример с 12 узлами без обоснования даётся 2 балла. То же самое касается задачи X.2, если построен верный пример без обоснования оптимальности.

В задаче X.3 за нахождение значения $n = 3$ без доказательства того, что других решений нет, можно присудить 1 балл. В задаче XI.1 годится любой верно указанный пример функции — не обязательно выраженный в виде формулы.

В задаче XI.3 за верно указанную тройку чисел, при отсутствии доказательства единственности, присуждается до 2 баллов. За сведение задачи к практически реализуемому способу перебора вариантов (если их немного) можно дополнительно давать до 2 баллов.

В задаче XI.5 за нахождении длин одной из сторон (равной 5) можно присудить 1 балл.

Всероссийская олимпиада школьников по математике

II (муниципальный) этап

2022 – 2023 учебный год

7 класс (решения)

1. Ответ: через 7 лет.

Пусть брату в настоящее время x лет, а сестре y . Тогда из условия имеем уравнения $4(x - 1) = y - 1$ и $3(x + 1) = y + 1$. Вычитая почленно из первого уравнения второе, имеем $x - 7 = y - 2$, то есть $x = 5$, и тогда $y = 17$. Если через n лет сестра станет вдвое старше брата, то $2(5 + n) = 17 + n$, откуда $n = 7$. Брату при этом будет 12 лет, а сестре 24.

2. Ответ: $(22 * 2 + 2) * 2 * 22 - 2 = 2022$.

Продemonстрируем, как можно было додуматься до этого решения. Для начала можно заметить, что неподалёку от числа 2022 имеется число 2024, которое делится на 2 и на 11 (по известному признаку), то есть оно делится на 22. А именно, $2024 = 22 \cdot 92$. Если мы с помощью пяти двоек сможем получить 92, то далее останется умножить на 22 и вычесть 2.

Легко понять, что 92 есть удвоенное 46, а последнее есть $44 + 2$, где 44 получаем как удвоенное 22.

3. Ответ: 7.

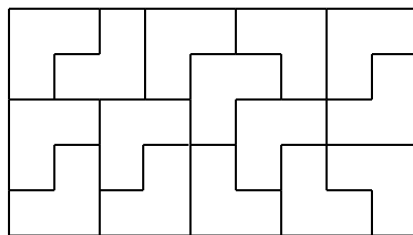
Число пар соседних красных фишек однозначно зависит от числа групп красных фишек, идущих подряд. В каждой группе число таких пар на единицу меньше числа фишек в этой группе. Поэтому групп красных фишек должно быть $10 - 5 = 5$. Но группы идущих подряд фишек красного и синего цвета чередуются, поэтому групп синих фишек также будет 5. Следовательно, по тому же принципу, число пар стоящих рядом синих фишек равно $12 - 5 = 7$.

4. Ответ: да, можно.

Если хотя бы одно из сделанных высказываний правдиво, то его сделал рыцарь, и тогда два других участника — лжецы.

Предположим, что оба высказывания ложны. Тогда их сделали лжецы, и их как минимум два. Но все трое быть лжецами не могут, так как в этом случае все сделанные высказывания были бы правдивыми. Таким образом, лжецов в компании два, а рыцарь один.

5. Ответ: да, можно. Один из примеров разрезания приведён на рисунке:



Всероссийская олимпиада школьников по математике

II (муниципальный) этап

2022 – 2023 учебный год

8 класс (решения)

1. Ответ: нет, не могло.

Для того, чтобы надпись на ящике из верной стала неверной, нужно, чтобы из него вынули шар одного цвета, а положили шар другого цвета. Это значит, что цвета перекладываемых шаров чередуются по кругу. Но общее число ящиков нечётно, поэтому такое чередование невозможно. Значит, где-то произойдёт совпадение цветов, и число шаров того и другого цвета в некотором ящике останется без изменений.

2. Ответ: $(22 * 2 + 2) * 2 * 22 - 2 = 2022$.

Продemonстрируем, как можно было додуматься до этого решения. Для начала можно заметить, что неподалёку от числа 2022 имеется число 2024, которое делится на 2 и на 11 (по известному признаку), то есть оно делится на 22. А именно, $2024 = 22 \cdot 92$. Если мы с помощью пяти двоек сможем получить 92, то далее останется умножить на 22 и вычесть 2.

Легко понять, что 92 есть удвоенное 46, а последнее есть $44 + 2$, где 44 получаем как удвоенное 22.

3. Ответ: да, обязательно.

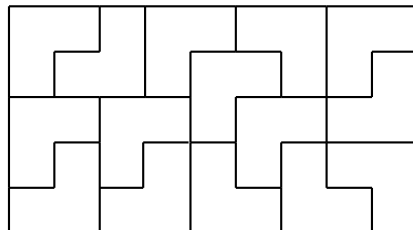
Если совпадений нет, то все 20 совместно выписанных чисел попарно различны. Общая сумма при этом будет не меньше, чем $1 + 2 + \dots + 20$, и она равна 210, так как эти числа можно сгруппировать в 10 пар по принципу $1 + 20 = 2 + 19 = \dots = 10 + 11$, где сумма чисел в каждой паре равна 21. Однако на самом деле сумма должна быть равна $100 + 100 = 200$, откуда следует, что какие-то совпадения обязательны.

4. Ответ: да, можно.

Диагонали четырёхугольника не могут оказаться перпендикулярными: в противном случае все 4 треугольника были бы прямоугольными. Следовательно, при пересечении диагоналей получается два острых и два тупых угла. В частности, по крайней мере два треугольника будет тупоугольными. Два других, согласно условию — остроугольный и прямоугольный. Тем самым, количество треугольников каждого из трёх видов выявляется однозначно.

5. Ответ: да, можно.

Один из примеров разрезания приведён на рисунке:



Всероссийская олимпиада школьников по математике

II (муниципальный) этап

2022 – 2023 учебный год

9 класс (решения)

1. Ответ: 5463728190.

Примером 10-значного числа является то, которое приведено в ответе. Докажем, что оно наибольшее. Ясно, что наибольшее число 10-значно, и оно содержит все 10 цифр. Цифра 0 должна идти с краю, то есть в самом конце, а рядом с ней идёт 9. Тогда 1 находится или между 8 и 9, или с краю, но в последнем случае число оказывается меньше предъявленного. Итого на конце у нас 8190. Получается, что 2 или с краю, или между 7 и 8, то есть в конце из тех же соображений будет 728190. Далее так же точно устанавливаем место 3 и её соседей, и в итоге приходим к числу, которое было названо.

2. Ответ: да, можно.

Пусть число рыцарей равно k . Тогда среди высказываний было ровно k правдивых, а это значит, что лжецов также k . С учётом того, что в компании 4 участника, имеем $k = 2$. При этом рыцари говорили про лжецов, а лжецы про рыцарей, то есть такая ситуация возможна.

3. Ответ: $(22 * 2 + 2) * 2 * 22 - 2 = 2022$.

Продemonстрируем, как можно было додуматься до этого решения. Для начала можно заметить, что неподалёку от числа 2022 имеется число 2024, которое делится на 2 и на 11 (по известному признаку), то есть оно делится на 22. А именно, $2024 = 22 \cdot 92$. Если мы с помощью пяти двоек сможем получить 92, то далее останется умножить на 22 и вычесть 2.

Легко понять, что 92 есть удвоенное 46, а последнее есть $44 + 2$, где 44 получаем как удвоенное 22.

4. Ответ: не может.

Допустим, что сумма чисел в любых двух соседних по стороне клетках — простое число. Тогда эта сумма нечётна, то есть соседние по стороне клетки заполнены числами разной чётности. По соседству с центральной клеткой расположены числа одной чётности, а все остальные имеют другую чётность. Из

этого следует, что числа по соседству с центральной имеют вид $n, n + 2, n + 4, n + 6$ для некоторого n . Прибавляя число в центральной клетке, получаем 4 простых числа вида $m, m + 2, m + 4, m + 6$ для некоторого m . Ясно, что среди первых трёх чисел имеется число, кратное 3, так как все они при делении на 3 дают разные остатки. Единственное простое число, делящееся на 3, это $m = 3$, но тогда $m + 6 = 9$ составное.

5. Ответ: 12.

Узлы клетчатой сетки расположены в вершинах квадрата 5×5 , то есть их 25. Любые два соседних узла — это соседние вершины одного из квадратов. Проведённая в нём диагональ затрагивает хотя бы одну из этих вершин. Рассмотрим 12 соединений соседних узлов. В каждом горизонтальном ряду соединим первый слева узел со вторым, а третий с четвёртым. Это даст 10 соединений, а в крайнем справа вертикальном ряду узлов сделаем ещё два соединения. Итого получится 12 соединений, не имеющих общих вершин, и в каждой паре хотя бы одна вершина есть конец одной из проведённых диагоналей. Таким образом, вершин получается не меньше 12.

Осталось построить пример с 12 вершинами. Рассмотрим шахматную раскраску узлов в белый и чёрный цвета, в которой все угловые вершины получают белый цвет. Легко видеть, что белых узлов будет 13, а чёрных 12. Теперь в каждом квадрате цвета вершин чередуются, и мы проводим диагональ, соединяющую две противоположные вершины чёрного цвета. Это даёт искомый пример, который показывает, что значение 12 достигается.

Всероссийская олимпиада школьников по математике

II (муниципальный) этап

2022 – 2023 учебный год

10 класс (решения)

1. Ответ: выигрывает начинающий.

Первые несколько ходов делаются однозначно: $2 \rightarrow 3 \rightarrow 4$. Далее тот, кто начинал в игре, может получить 5 или 6. При этом из 5 можно получить только число 6. Рассмотрим два случая.

1) В игре, начинающейся с числа 6, проигрывает тот, кто делает в ней первый ход. Тогда начинающему в основной игре надо от 4 перейти к 6, предоставляя противнику проигранную позицию.

2) В игре, начинающейся с числа 6, выигрывает тот, кто делает в ней первый ход. Тогда начинающему в основной игре надо от 4 перейти к 5, чтобы далее противник перешёл к 6 и предоставил первому игроку выигранную для него позицию.

Других случаев нет, так как ничейный исход невозможен ввиду запрета превышать значение 100, согласно правилам.

Заметим, что правильная стратегия игры этими соображениями в явном виде не задаётся, но в условии это и не требовалось.

2. Ответ: 119.

Пусть A — сумма первых цифр, B — сумма вторых цифр слагаемых. Тогда $10A + B = 101$, и требуется найти минимум для значения $10B + A$. Ввиду того, что $B = 101 - 10A$, минимизируемая величина составляет $10(101 - 10A) + A = 1010 - 99A$, то есть A надо максимизировать, а B минимизировать. Число B оканчивается цифрой 1, и при этом оно больше 1, так как слагаемых более одного, а все последние цифры ненулевые. Следовательно, $B \geq 11$. Отсюда $10A = 101 - B \leq 90$, то есть $A \leq 9$. Тем самым, минимизируемое значение не меньше $1010 - 99 \cdot 9 = 119$.

Примеров, когда это значение достигается, довольно много. Достаточно сделать сумму вторых цифр равной 11. Скажем, $89 + 12 = 101$, и $98 + 21 = 119$.

3. Ответ: при $n = 3$.

Предположим, что число $n^4 + n^3 + n^2 + n + 1$ является точным квадратом и равно m^2 . Заметим, что $(n^2 + \frac{n}{2})^2 = n^4 + n^3 + \frac{n^2}{4} < m^2$, откуда $m \geq n^2 + \frac{n+1}{2}$. Отсюда следует неравенство $n^4 + n^3 + n^2 + n + 1 = m^2 \geq n^4 + n^3 + n^2 + \frac{n^2+2n+1}{4}$, то есть $n^2 - 2n - 3 \leq 0$. Левая часть равна $(n - 3)(n + 1)$, поэтому $n \leq 3$. Значения $n = 1$ и $n = 2$ дают соответственно 5 и 31, а при $n = 3$ получается $81 + 27 + 9 + 3 + 1 = 11^2$.

4. Ответ: оба значения равны 50.

Пусть O — центр окружности. По условию, её радиус равен $R = 5$. Опустим из точки O перпендикуляр на хорду DE . Пусть K — основание этого перпендикуляра. Это середина хорды, то есть $KD = KE = x$. Треугольник OCK имеет углы величиной 90 и 45 градусов, поэтому он равнобедренный прямоугольный. Отсюда $KC = KO = y$.

Без ограничения общности будем считать, что точка C лежит между K и D . Тогда $CD^2 + CE^2 = (KD - KC)^2 + (KE + KC)^2 = (x - y)^2 + (x + y)^2 = 2(x^2 + y^2) = 2(KD^2 + KO^2) = 2OD^2 = 2R^2 = 50$ с учётом теоремы Пифагора. Таким образом, сумма квадратов не зависит от выбора точки C на диаметре.

5. Ответ: не всегда.

Рассмотрим такой пример компании: пятеро попарно знакомы между собой, и больше никто друг с другом не знаком. Если бы нашлись три пары знакомых, то для этого потребовалось бы 6 человек, но все они находятся среди пяти.

Заметим, что в каждой паре не знакомых между собой хотя бы один не входит в число выделенных пятерых. Допустим, что нашлись три пары не знакомых между собой. Отмечая в каждой из трёх пар того, кто не входит в число пяти, мы получаем троих, однако их всего двое.

Всероссийская олимпиада школьников по математике

II (муниципальный) этап

2022 – 2023 учебный год

11 класс (решения)

1. Ответ: да, существует.

Один из простейших примеров такой функции задаётся формулой $f(x) = \cos x$. Ясно, что $f(\pi) < 0$, то есть функция может принимать отрицательные значения. При этом множество значений косинуса равно $[-1, 1] \subset (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, а на последнем промежутке косинус всюду положителен, то есть $f(f(x)) = \cos \cos x > 0$ для всех x .

Имеется много и других примеров.

2. Ответ: 215.

Если первая цифра имеет n натуральных делителей, то продолжить её до четырёхзначного числа можно n^3 способами. Среди цифр от 1 до 9 одна имеет 1 делитель, четыре имеют 2 делителя, два имеют 3 делителя, и два имеют 4 делителя. Итого имеем $1 \cdot 1^3 + 4 \cdot 2^3 + 2 \cdot 3^3 + 2 \cdot 4^3 = 1 + 32 + 54 + 128 = 215$.

3. Ответ: одно решение.

Один из возможных подходов таков: вводя обозначения для чисел, составляем систему $x + y + z = 11$, $x^2 + y^2 + z^2 = 155$. Выражая $z = 11 - x - y$ из первого уравнения и подставляя во второе, после упрощений получаем $x^2 + y^2 + xy - 11x - 11y - 17 = 0$. После выделения полных квадратов и несложных преобразований возникает уравнение $3(2x + y - 11)^2 + (3y - 11)^2 = 688$, которое сводится к конечному перебору вариантов. Однако такой довольно естественный способ решения связан с чисто техническими трудностями, поэтому предложим другой вариант рассуждений.

Прежде всего, известно, что квадрат чётного числа при делении на 4 даёт в остатке 0, а квадрат нечётного даёт в остатке 1. Число 155 даёт остаток 3 от деления на 4, откуда ясно, что все три числа x , y , z нечётны. Максимум модуля этих чисел строго меньше 13, а также строго больше 7 ввиду того, что $3 \cdot 7^2 < 155$. Это значит, что всё сводится к случаям $|x| = 11$ и $|x| = 9$ с точностью до симметрии.

В первом случае $y^2 + z^2 = 155 - 11^2 = 34$, откуда $\{|y|, |z|\} = \{5, 3\}$. Нетрудно заметить, что из чисел $\pm 11, \pm 5, \pm 3$ невозможно получить сумму, равную 11. Во втором случае будет $y^2 + z^2 = 155 - 9^2 = 74$, откуда $\{|y|, |z|\} = \{7, 5\}$. Из чисел $\pm 9, \pm 7, \pm 5$ значение суммы 11 получается только одним способом в виде $9 + 7 - 5$. Тем самым, множество из трёх чисел определяется однозначно: $\{9, 7, -5\}$.

4. Ответ: да, всегда.

Случаи, когда каждый знаком с каждым, или никто ни с кем не знаком, очевидны: три пары можно выделить как угодно. Поэтому будем считать, что встречаются как пары знакомых, так и пары не знакомых между собой. Тогда найдётся участник A , который знает некоторого участника B и не знает какого-то участника C . Допустим, что среди оставшихся мы выделили k пар, в каждой из которых участники знакомы, либо k пар, в каждой из которых участники не знакомы. В первом случае добавляем пару (A, B) , а во втором (A, C) . Это рассуждение показывает, что увеличение числа участников на 3 ведёт к увеличению числа выделяемых пар на 1.

Из двух участников мы выделяем одну пару, из 5 участников две пары, и тогда из 8 участников можно выделить три пары, которые удовлетворяют условию.

5. Ответ: 5 и 13.

Без ограничения общности можно считать, что вписанная окружность касается отрезка BM . Легко заметить, что центр вписанной окружности равноудалён от концов отрезка AM , который окружность делит на три равные части. Отсюда делаем вывод, что ABM равнобедренный, и $AB = BM = \frac{1}{2}BC = 5$.

Далее, пусть $AC = x$, а длина отрезка касательной из точки B к окружности равна y . Тогда x есть сумма длин отрезков касательных к окружности, проведённых из точек A и C , то есть $x = (5 - y) + (10 - y) = 15 - 2y$.

Через $3z$ обозначим длину медианы AM . По теореме о касательной и секущей, которые мы проводим из точки M , имеет место равенство $(5 - y)^2 = z \cdot 2z = 2z^2$. Далее можно использовать формулу для нахождения длины медианы:

$$AM^2 = \frac{2(AB^2 + AC^2) - BC^2}{4},$$

которая следует из известного свойства параллелограмма (сумма квадратов длин всех сторон равна сумме квадратов длин диагоналей). Следовательно, $4AM^2 = 36z^2 = 2(x^2 + 5^2) - 10^2 = 2x^2 - 50$, то есть $18z^2 = x^2 - 25$.

Пользуясь выведенными выше соотношениями, имеем $9(5 - y)^2 = (15 - 2y)^2 - 25$, что ведёт к квадратному уравнению $y^2 - 6y + 5 = 0$. Отсюда $y = 1$, так как $y < AM = 5$, и второй корень не подходит. Получили, что $AC = x = 15 - 2y = 13$.